14. Να βρείτε τους $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^*$, με $\alpha > \beta$, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

(i) $\alpha+\beta=10$ και $(\alpha,\beta)=2$,　　(ii) $\alpha\beta=96$ και $(\alpha,\beta)=4$,

(iii) $\alpha\beta=96$ και $[\alpha,\beta]=24$　　(iv) $(\alpha,\beta)=4$ και $[\alpha,\beta]=24$,

(v) $\alpha+\beta=7(\alpha,\beta)$ και $[\alpha,\beta]=60$.

15.(i) Να αποδείξετε ότι ένας θετικός ακέραιος $\alpha \geq 1000$ διαιρείται με το 8, αν και μόνο αν το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 8.

(ii) Ένας έμπορος αγόρασε 72 φορητές. τηλεοράσεις και πλήρωσε συνολικά $y425x$ ευρώ, όπου τα ψηφία x, y των μονάδων και των δεκάδων χιλιάδων του αριθμού είναι άγνωστα. Μπορείτε να βρείτε πόσο αγόρασε την καθεμιά τηλεόραση, αν το κόστος της καθεμιάς είναι ακέραιος αριθμός;

16. (i) Δυο φίλοι A, B πιάνουν δουλειά, ο πρώτος την 1η Ιανουαρίου, ενώ ο δεύτερος στις 2 Ιανουαρίου του ίδιου έτους. Ο πρώτος παίρνει ρεπό κάθε 5 εργασιμες μέρες, ενώ ο δεύτερος παίρνει ρεπό κάθε 7 εργάσιμες μέρες. Είναι δυνατόν οι δυο φίλοι να πάρουν ρεπό την ίδια μέρα ώστε να πάνε εκδρομή με τις οικογένειές τους;

(ii) Να εξετάσετε και την περίπτωση που ο B παίρνει ρεπό κάθε 6 εργάσιμες ημέρες.

14. (i) Επειδή $(\alpha,\beta)=2$, έχουμε $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)=1$, οπότε, αν θέσουμε $A=\frac{\alpha}{2}$ και $B=\frac{\beta}{2}$, θα ισχύει

$$\alpha=2A \quad \text{και} \quad \beta=2B, \quad \text{με} \quad (A,B)=1 \quad \text{και} \quad A>B>0 \qquad (1)$$

Επομένως, η σχέση $\alpha+\beta=10$ γράφεται:

$$2A+2B=10 \Leftrightarrow A+B=5 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A=4 \\ B=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases}.$$

Άρα $\begin{cases} \alpha=8 \\ \beta=2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} \alpha=6 \\ \beta=4 \end{cases}$.

(ii) Επειδή $(\alpha,\beta)=4$, έχουμε $\left(\frac{\alpha}{4},\frac{\beta}{4}\right)=1$, οπότε, αν θέσουμε $A=\frac{\alpha}{4}$ και $B=\frac{\beta}{4}$, θα ισχύει

$$\alpha=4A \quad \text{και} \quad \beta=4B, \quad \text{με} \quad (A,B)=1 \quad \text{και} \quad A>B>0 \qquad (2)$$

Επομένως, η σχέση $\alpha\beta=96$ γράφεται

$$4A\cdot 4B=96 \Leftrightarrow AB=6 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A=6 \\ B=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases}.$$

Άρα $\begin{cases} \alpha=24 \\ \beta=4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} \alpha=12 \\ \beta=8 \end{cases}$.

(iii) Επειδή $(\alpha,\beta)[\alpha,\beta]=\alpha\beta$, λόγω της υπόθεσης, έχουμε $(\alpha,\beta)\cdot 24=96$, οπότε $(\alpha,\beta)=4$. Έτσι $\alpha\beta=96$ και $(\alpha,\beta)=4$, οπότε αναγόμαστε στην (ii) περίπτωση.

(iv) Επειδή $(\alpha,\beta)[\alpha,\beta]=\alpha\beta$, λόγω της υπόθεσης έχουμε $4\cdot 24=\alpha\beta$. Έτσι $\alpha\beta=96$ και $(\alpha,\beta)=4$, οπότε αναγόμαστε στην (ii) περίπτωση.

(v) Έστω $(\alpha,\beta)=\delta$. Τότε $\alpha+\beta=7\delta$, οπότε $\frac{\alpha}{\delta}+\frac{\beta}{\delta}=7$ με $\left(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta}\right)=1$. Αν θέσουμε $A=\frac{\alpha}{\delta}\in\mathbb{Z}$ και $B=\frac{\beta}{\delta}\in\mathbb{Z}$, τότε έχουμε

$$\begin{cases} \alpha=\delta A \\ \beta=\delta B \end{cases} \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} A+B=7 \\ (A,B)=1, \ \text{με} \ A>B>0 \end{cases} \quad (4)$$

Έτσι $\begin{cases} A=6 \\ B=1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} A=5 \\ B=2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} A=4 \\ B=3 \end{cases}$.

• Αν $A=6$ και $B=1$, τότε $\alpha=6\delta$ και $\beta=\delta$, οπότε η σχέση $[\alpha,\beta]=60$ γράφεται:

$$[6\delta,\delta]=60 \Leftrightarrow \delta[6,1]=60 \Leftrightarrow \delta\cdot 6=60 \Leftrightarrow \delta=10$$

και συνεπώς $\alpha=60$ και $\beta=10$.

• Αν $A=5$ και $B=2$, τότε $\alpha=5\delta$ και $\beta=2\delta$, οπότε η σχέση $[\alpha,\beta]=60$ γράφεται:

$$[5\delta,2\delta]=60 \Leftrightarrow \delta[5,2]=60 \Leftrightarrow \delta\cdot 10=60 \Leftrightarrow \delta=6$$

και συνεπώς $\alpha=30$ και $\beta=12$.

• Αν $A=4$ και $B=3$, τότε $\alpha=4\delta$ και $\beta=3\delta$, οπότε η σχέση $[\alpha,\beta]=60$ γράφεται:

$$[4\delta,3\delta]=60 \Leftrightarrow \delta[4,3]=60 \Leftrightarrow \delta\cdot 12=60 \Leftrightarrow \delta=5$$

και συνεπώς $\alpha=20$ και $\beta=15$.

15. (i) Αν $x_0, x_1, x_2, x_4, \ldots, x_\nu$ είναι τα ψηφία των μονάδων, δεκάδων, εκατοντάδων, χιλιάδων κτλ. του αριθμού α, τότε ο α γράφεται

$$\begin{aligned}\alpha &= x_\nu \cdot 10^\nu + \ldots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + x_0 \\ &= (x_\nu \cdot 10^\nu + \ldots + x_3 \cdot 10^3) + (x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + x_0). \qquad (1)\end{aligned}$$

Επειδή $1000 = \text{πολ}8$, έχουμε

$$x_\nu \cdot 10^\nu + \ldots + x_3 \cdot 10^3 = \text{πολ}1000 = \text{πολ}8 .$$

Επομένως, λόγω της (1), ο α γράφεται

$$\alpha = \text{πολ}8 + (x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + x_0). \qquad (2)$$

Άρα ο α διαιρείται με το 8, αν και μόνο αν ο $x_2 10^2 + x_1 10 + x_0$ διαιρείται με το 8, δηλαδή, αν και μόνο αν το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 8.

(ii) Επειδή το κόστος της κάθε φορητής τηλεόρασης είναι ακέραιος αριθμός, το συνολικό κόστος $y425x$ θα διαιρείται με το 72. Επειδή $72 = 8\cdot 9$ και $(8,9) = 1$, για να διαιρείται ο αριθμός $y425x$ με το 72, πρέπει και αρκεί να διαιρείται και με το 8 και με το 9.

— Για να διαιρείται με το 8 πρέπει να αρκεί, λόγω της (1), το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του, $\overline{25x}$, να διαιρείται με το 8. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $x=6$.

— Για να διαιρείται με το 9 πρέπει και αρκεί το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται με το 9, δηλαδή

$$\begin{aligned} 9\mid(y+4+2+5+x) &\Leftrightarrow 9\mid(y+4+2+5+6), \quad \text{αφού} \quad x=6 \\ &\Leftrightarrow 9\mid(y+17) \\ &\Leftrightarrow y=1. \end{aligned}$$

Άρα, ο ζητούμενος αριθμός είναι 14256, οπότε κάθε φορητή τηλεόραση κόστισε 14256:72 = 198 ευρώ.

16. (i) Αριθμούμε τις ημέρες, ξεκινώντας από την 1η Ιανουαρίου.

A	1	2	3	4	5	$\boxed{6}$	7	8	9	10	11	$\boxed{12}$	13	14	15	16	17	$\boxed{18}$	19
B	$\boxed{1}$	2	3	4	5	6	7	8	$\boxed{9}$	10	11	12	13	14	15	16	$\boxed{17}$	18	19

Ο Α παίρνει ρεπό στις:

6, 12, 18, 24, 30, ...,

δηλαδή στα πολλαπλάσια του 6, ενώ ο Β παίρνει ρεπό στις

9, 17, 25, 33, 41, ...,

δηλαδή στα πολλαπλάσια του 8 αυξημένα κατά 1 (Αφού ο Β καθυστέρησε 1 ημέρα για να πιάσει δουλειά).

Για να συναντηθούν οι φίλοι αρκεί να υπάρχει θετικό πολλαπλάσιο του 6 που να είναι ίσο με ένα θετικό πολλαπλάσιο του 8 αυξημένο κατά 1. Δηλαδή αρκεί να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ τέτοιοι ώστε

$$6\kappa = 8\lambda + 1.$$

Αυτό όμως, είναι αδύνατο, αφού ο 6κ είναι άρτιος, ενώ ο $8\lambda+1$ είναι περιττός.

(ii) Αριθμούμε τις ημέρες, ξεκινώντας από την 1η Ιανουαρίου.

A	1	2	3	4	5	$\boxed{6}$	7	8	9	10	11	$\boxed{12}$	13	14	15	16	17
B	$\boxed{1}$	2	3	4	5	6	7	$\boxed{8}$	9	10	11	12	13	14	$\boxed{15}$	16	17

Τώρα ο Α παίρνει ρεπό στα πολλαπλάσια του 6, ενώ ο Β παίρνει ρεπό στα πολλαπλάσια του 7 αυξημένα κατά 1

Για να συναντηθούν οι φίλοι αρκεί να υπάρχει θετικό πολλαπλάσιο του 6 που να είναι ίσο με ένα θετικό πολλαπλάσιο του 7 αυξημένο κατά 1, δηλαδή αρκεί να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ τέτοιοι ώστε $6\kappa = 7\lambda+1$ ή, ισοδύναμα,

$$6\kappa - 7\lambda = 1. \tag{1}$$

Επειδή $(6,-7)\mid 1$ η διοφαντική εξίσωση (1) έχει λύση. Μια προφανής λύση της (1) είναι η

$$(\kappa_0,\ \lambda_0) = (-1,\ -1).$$

Επομένως, οι λύσεις, $(\kappa,\ \lambda)$, της (1) δίνονται από τον τύπο

$$\kappa = -1 + 7t \quad \text{και} \quad \lambda = -1 + 6t\,, \quad t \in \mathbf{Z}\,.$$

Επειδή $\kappa > 0$ και $\lambda > 0$ θα ισχύει

$$\begin{cases} -1 + 7t > 0 \\ -1 + 6t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > \dfrac{1}{7} \\ t > \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Επομένως, θα είναι

$$6\kappa = 7\lambda + 1 = \mathbf{42}\boldsymbol{t}\,\mathbf{-6}\,, \quad t = 1, 2, 3, \ldots$$

οπότε οι φίλοι θα έχουν κοινό ρεπό στις:

36, 78, 120, ...

Άρα, μπορούν να συναντηθούν για πρώτη φορά στις $36 - 31 = 5$ Φεβρουαρίου.